UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA
FORMAÇÃO DE PROFESSOR

GABARITO DA PROVA DO PROCESSO SELETIVO

Questões Objetivas

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Alternativa Escolhida	B	B	C	D	D	B	B	C	D	E	D	C	C	A	B

Questões Discursivas

1) $a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) - ax^3 - bx^2 - cx = x^2$

$ax^3 + 3ax^2 + 3ax + a + bx^2 + 2bx + b + cx + c - ax^3 - bx^2 - cx = x^2$

$3ax^2 + x(3a+2b) + (a+b+c) = x^2$

Logo temos o sistema

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Cujas soluções são: $a = \dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{-1}{2}$ e $c = \dfrac{1}{6}$.

2) Para $n = 4$, temos:

$$4! = 24 > 16 = 2^4.$$

Logo o resultado é verdadeiro para $n = 4$.

Suponhamos verdadeiro para $n = k$, isto é $k! \geq 2^k$. Vamos mostrar que vale para $n = k+1$.

$$(k+1)! = (k+1)k! \geq (k+1)2^k \geq 2.2^k = 2^{k+1}.$$

Logo $(k+1)! \geq 2^{k+1}$, para todo $k > 4$.

Portanto, $n! \geq 2^n$, para todo $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$.

3) $\dfrac{20n}{4n-2}=\dfrac{10n}{2n-1}=5+\dfrac{5}{2n-1}\in\mathbb{Z}$.

Logo
$\dfrac{20n}{4n-2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow(2n-1)\backslash 5 \;\Leftrightarrow 2n-1\in\{\pm1,\pm5\}\Leftrightarrow n\in\{-2,0,1,3\}$.

Portanto, existem exatamente quatro valores possíveis para n.

4) $mdc(m,n)=1\Rightarrow\exists u,v\in\mathbb{Z}$ tais que $mu+nv=1$.
Multiplicando por r temos $mur+nvr=r$ (I).
Como m divide nr podemos escrever $nr=ms$, para algum $s\in\mathbb{Z}$.

Assim (I) fica: $mur+msv=r$
$m(ur+sv)=r$.

Portanto, m divide r.

5) $$\frac{x+2}{3-x}-\frac{x}{5+x}<0$$

$$\frac{(x+2)(5+x)-x(3-x)}{(3-x)(5+x)}<0$$

$$\frac{2x^2+4x+10}{(3-x)(5+x)}<0$$

O polinômio $2x^2+4x+10$ tem discriminante negativo, portanto é sempre maior que zero.
Assim basta saber quando (3-x)(5+x)<0.
Isto ocorre quando vale uma das possibilidades (i) ou (ii) abaixo:

i) $3-x>0$ e $5+x<0$

$x<3$ e $x<-5$. Logo $x\in(-\infty,-5)$.

ii) $3-x<0$ e $5+x>0$

$x>3$ e $x>-5$. Logo $x\in(3,+\infty)$.

Portanto, o conjunto solução é $S=(-\infty,-5)\bigcup(3,+\infty)$.